

무요소법에 적용된 국부 단위분할원리

Application of the Local Partition of Unity to the Element Free Galerkin Method

지광습\*, 정현준\*\*

Goangseup Zi, Hyunjun Jung.

1. 서 론

균열로 인한 불연속면은 기본적으로 해석 영역의 형태를 바꾸기 때문에 수치해석을 수행할 때 여러 가지 어려움을 수반한다. 이를 극복하기 위해 여러 가지 기법이 개발되었으며, 이 중 성공적으로 평가받는 기법들로는 요소 간 분할 모델(inter-element method), 내부 불연속모델(imbedded discontinuity method), 확장유한요소법(extended finite element method; XFEM) 을 들 수 있다. 확장유한요소법은 간단한 구조와 그 해석기법의 안정성이 여러 가지 예제를 통해 증명된 바 있다. 본 연구에서는 확장유한요소법(extended finite element method; XFEM)을 무요소법에 적용하여 전통적인 무요소법에서 사용하는 투과성 개념(visibility criterion)을 제거하는 것을 목적으로 하였다.

국부 단위 분할 원리에 근거한 무요소법을 이용해 균열문제에 접근할 경우 기대되는 장점들은 (1) 무요소법의 고차연속성 때문에 국부적 보간법을 이용할 필요가 없으며, (2) 응력이나 변형률분포에 불연속성이 없으며, (3) 균열 선단의 비선형 이격을 자동적으로 구사할 수 있는 점들이 있다. 확장유한요소법에서는 일반적으로 저차의 형상함수를 사용하므로 균열 선단의 이격은 비선형 확장함수를 사용하지 않을 경우 항상 선형이 된다.

2. 무요소근사법

표준 Galerkin 수치해석법의 근사함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u(\mathbf{X}, t) = \sum_I \Phi_I(\mathbf{X}) u_I(t) \tag{1}$$

여기서  $\Phi_I(\mathbf{X}) =$  절점  $I$ 의 형상함수(shape function),  $\mathbf{X}_I =$  절점  $I$ 의 변형 전 위치,  $u_I =$  절점  $I$ 에 해당하는 매개변수이다. 여러 가지 무요소법이 있지만 EFG법(Belytschko 등, 1994; Belytschko 등, 1995; Belytschko 등, 1996)에서는 형상함수  $\Phi_I(\mathbf{X})$ 가 다음과 같이 계산된다.

$$\Phi_I(\mathbf{X}) = \mathbf{p}(\mathbf{X})^T \mathbf{A}(\mathbf{X})^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{X}_I) \tag{2}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \sum_I \mathbf{p}(\mathbf{X}_I)^T(\mathbf{X}_I) W(\mathbf{X} - \mathbf{X}_I, h) \tag{3}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}_I) = \mathbf{p}(\mathbf{X}_I) W(\mathbf{X} - \mathbf{X}_I, h) \tag{4}$$

여기서,  $\mathbf{p}(\mathbf{X}) =$  기저다항식(base polynomial),  $W =$  가중함수(kernel 함수)이다. 각 운동량 보존을 위해서는 근사함수가 완전해야 하므로 본 연구에서는 기저다항식을  $\mathbf{p}(\mathbf{X}) = (1, X, Y)$ 로 취한다. 무요소법은 유한요소법에 비해 고차의 연속성을 지니고 균열 주변에서 매끄러운 응력분포를 자동으로 얻을 수 있

\*정회원 · 고려대학교 사회환경시스템공학과조교수 · 공학박사 · E-mail:g-zi@korea.ac.kr-발표자

\*\*고려대학교 사회환경시스템공학과 · 석사과정

는 장점이 있다. 무요소법의 연속성은 가중함수  $W$ 에 의해 결정되는데, 본 연구에서는  $C^2$ 인  $B$ -spline을 이용했다.

### 3. 국부 단위분할 원리에 근거한 근사함수

단위 분할원리를 이용해서 균열을 나타내기 위한 핵심은 매개변수를 추가로 사용해서 근사함수가 불연속성을 포함하도록 확장하는 것이다. 이를 통해 전체영역에서 연속적으로 근사함수를 정의할 수 있게 된다 (Belytschko 등, 2000). 확장유한요소법(Zi와 Belytschko, 2003)과 마찬가지로 본 연구에서도 절점의 영향영역과 균열의 상호관계에 따라 두 가지의 확장함수를 고려한다. 균열이 절점의 영향영역을 완전히 관통한 경우는 다음과 같이 정의된 계단함수  $H$ 를 사용한다.

$$H[f_I(\mathbf{X})] = \begin{cases} 1 & \text{for } f_I(\mathbf{X}) > 0 \\ -1 & \text{for } f_I(\mathbf{X}) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

여기서  $f(\mathbf{X}_I)$  = 거리함수이며 다음과 같이 정의된다.

$$f_I(\mathbf{X}) = \begin{cases} \text{sign}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{X}_I - \mathbf{X}) \min\|\mathbf{X}_I - \mathbf{X}\|] & \text{for } \mathbf{X}_I \in W_b \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{X}_{tip} - \mathbf{X}_I) & \text{for } \mathbf{X}_I \in W_s \end{cases} \quad (6)$$

$W_b$  = 균열이 완전히 관통한 영향영역,  $W_s$  = 균열 끝이 내부에 위치한 영향영역을 나타낸다.

무요소법에서는 요소망의 경계가 없으므로 Zi 등(2003)의 기법을 사용할 수 없으며 대신 그 이전형태인 가지함수를 사용한다. 선형탄성문제의 경우 해석적 해의 기저함수인

$$\mathbf{B} = \sqrt{r} \left( \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \quad (7)$$

를 사용하고, 점성균열인 경우는 식 (7)의 첫 번째 항만의 특이성을 제거하고 사용한다.

$$\mathbf{B} = r^m \sin \frac{\theta}{2}, \text{ with } m = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

위 단일 균열에 대한 식을 Zi 등(2004)과 같이 다중 균열로 확장하여 다음과 같이 최종 근사함수가 얻는다.

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{I \in W(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \delta \mathbf{u}_I \quad (15)$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_c} \sum_{I \in W_b(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) H_I^n(\mathbf{X}) \delta \mathbf{a}_I^n + \sum_{m=1}^{m_t} \sum_{I \in W_s(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \sum_K \mathbf{B}_{KI}^m(\mathbf{X}) \delta \mathbf{b}_{KI}^m$$

$$\mathbf{u} = \sum_{I \in W(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \mathbf{u}_I \quad (16)$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_c} \sum_{I \in W_b(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) H_I^n(\mathbf{X}) \mathbf{a}_I^n + \sum_{m=1}^{m_t} \sum_{I \in W_s(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \sum_K \mathbf{B}_{KI}^m(\mathbf{X}) \mathbf{b}_{KI}^m$$

여기서  $n$  = 영향영역을 관통한 균열번호,  $n_c$  = 관통균열의 수,  $m$  = 균열 끝의 번호,  $m_t$  = 균열 끝의 수

## 4. 지배방정식과 구성방정식

### 4.1 강형 지배방정식

한 점의 평형조건으로부터, Lagrangian 형태의 강형 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} \in \Omega_0 \setminus \Gamma_0^c \quad (17)$$

여기서  $\rho_0$  = 초기 밀도,  $\ddot{\mathbf{u}}$  = 가속도,  $\mathbf{P}$  = 공칭응력 텐서,  $\mathbf{b}$  = 물체력,  $\Omega_0$  = 대상영역이고 미분방정식 경계조건은,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \text{ on } \Gamma_0^u \quad (18)$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}, t) \text{ on } \Gamma_0^t \quad (19)$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P}^- = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P}^+ = \mathbf{t}_0 \text{ on } \Gamma_0^c \quad (20)$$

$$t_{\omega} = t_{\omega}([u]) \text{ on } \Gamma_0^c \tag{21}$$

4.2 연속체의 구성방정식

본 연구에서는 Belytschko 등 (2003)에서 사용된 Lemaitre의 손상모델(1971)은 콘크리트의 파괴를 모사할 때 사용하고 열로 인한 항복구간의 변화를 표현할 수 있는 Johnson-Cook 모델(1983)은 금속의 파괴를 모사할 때 사용했다. Lemaitre 모델은 상수형 손상모델이며 그 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma = (1 - D)C : \epsilon \tag{22}$$

$$D(\bar{\epsilon}) = 1 - (1 - A)\epsilon_{D_0} \bar{\epsilon}^{-1} - A e^{-B(\bar{\epsilon} - \epsilon_{D_0})} \tag{23}$$

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\max(\epsilon_i, 0)]^2} \tag{24}$$

Johnson-Cook 모델(1983)은  $J_2$ 소성론에 기초하지만, 변형률의 변화율과 온도의 영향이 유효항복응력  $\sigma_Y$ 에 직접적으로 고려된다. Gummalla 등(1999)의 유효응력을 사용하면

$$\sigma_Y = \max[(A + B\gamma^n)(1 + C \ln \bar{\epsilon})(1 - \exp(-(T - T_0)/\kappa_0 - 1)), 0] \tag{25}$$

$$T^* = \frac{T - T_r}{T_m - T_r} \tag{26}$$

$$\Delta T = \int_0^\gamma \frac{\beta}{\rho c_v} \sigma_Y d\gamma \tag{27}$$

4.3 점성균열

본 연구에서는 이 중 가장 간단한 선형 점성균열을 이용했다. 균열의 개구변위(opening displacement)는 식 (15)와 (16)의 확장된 항의 불연속량에 의해서만 지배되고, 다음과 같다

$$[u(X)] = 2 \sum_{n=1}^{n_c} \sum_{I \in W_n^-(X)} \phi_I(X) a_I^n + \sum_{m=1}^{m_c} \sum_{I \in W_m^-(X)} \phi_I(X) \sum_K [B_K(X)] b_{KI}^m \tag{28}$$

균열 개구변위  $[u(X)]$ 의 법선성분  $\delta_n$ 과 접선성분  $\delta_t$ 는 다음과 같다.

$$\delta_n = [u(X)] \cdot n \tag{29}$$

$$\delta_t = \| [u(X)] - \delta_n n \| \tag{30}$$

4.4 균열성장 조건 및 속도

균열의 생성조건으로서 쌍곡선성 상실조건(loss of hyperbolicity)을 적용했다(Belytschko 등, 2004). 이 조건의 공학적인 의미는 재료의 한 점에서 특정방향으로 변형열화가 발생하면 균열이 형성되는 것을 의미하며, 음파텐서(acoustic tensor)  $A$ 의 고유치가 영이므로 음수가 되는 조건으로 간단히 쓸 수 있다. 즉,  $\min \text{eig}(Q) \leq 0$  (31)

여기서,  $Q = n \cdot A \cdot n$ ,  $n = [\sin \theta \quad \cos \theta]$ 이다.  $\theta$ 는 균열 끝의 접선을 중심으로  $\pm 90^\circ$ 이내에서  $2^\circ$ 씩 변화하는 값이다.

5. 이산화 지배방정식

가상 일의 원리를 사용하면

$$\delta W = \delta W_f - \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{kin}} = 0 \tag{34}$$

$$\delta W_f = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} (\nabla_0 \otimes \delta \mathbf{u})^T : \mathbf{P} d\Omega_0 \tag{35}$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_0^c} \delta [\mathbf{u}] \tag{36}$$

$$\delta W_{\text{kin}} = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\Omega_0 \tag{37}$$

식 (15)와 (16)의 시험함수와 사용함수를 식 (34)부터 (37)에 대입하고 절점 매개변수의 변분인  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{a}$ ,  $\delta \mathbf{b}$  를 변분법의 원리에 따라 제거하면, 다음과 같은 이산화 방정식이 얻어진다.

$$\mathbf{M}_{IJ} \ddot{\mathbf{u}}_I = \mathbf{F}_I^{\text{ext}} - \mathbf{F}_I^{\int} \tag{38}$$

$$\text{여기서, } \ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_I \\ \ddot{a}_I \\ \ddot{b}_{IK} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{IJ} = \begin{bmatrix} m_{IJ}^{uu} & m_{IJ}^{ua} & m_{IJ}^{ub} \\ m_{IJ}^{au} & m_{IJ}^{aa} & m_{IJ}^{ab} \\ m_{IJ}^{bu} & m_{IJ}^{ba} & m_{IJ}^{bb} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_I^{\text{ext}} = \begin{bmatrix} f_I^{u, \text{ext}} \\ f_I^{a, \text{ext}} \\ f_I^{b, \text{ext}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_I^{\int} = \begin{bmatrix} f_I^u \int \\ f_I^a \int \\ f_I^b \int \end{bmatrix}$$

### 6. 수치 적용예제

모드 I 선형탄성 균열문제, 복합모드 선형탄성 균열문제, 2개의 노치가 있는 시편의 균열 양상(그림 13.), Kalthoff의 동적과괴 문제, 균열의 분기 등에 적용하였다.

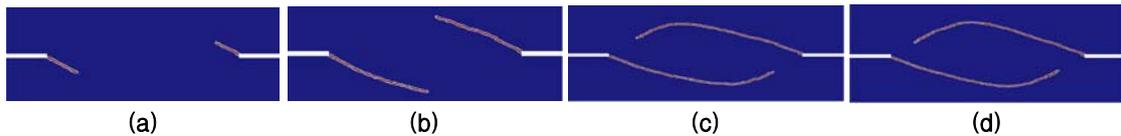


그림 13. 2개의 노치가 있는 시편의 균열 성장  
(a),(b),(c) 국부 감소법, (d) Lagrange 다중법

### 7. 결 론

본 연구에서는 균열 진전 문제에 대해 무요소법을 적용하였다. 무요소법에서 균열 선단의 확장에는 가지 함수가 적용되었고, 변위장의 불연속인 부분에만 영향을 받는 점성 모델이 사용되었다. 실험적 또는 수치적 데이터를 이용할 수 있는 몇 개의 정적 및 동적 문제에 국부 단위분할 원리에 기초한 무요소법을 적용하였고, 해석적 해를 이용할 수 있는 모드 I 선형탄성 균열문제와 복합모드 선형탄성 균열문제에 적용하였으며, 결과는 매우 정확하였다. 또한, 적은 수의 절점만으로도 정확한 균열 경로를 획득할 수 있었다. 서로 다른 가지함수들을 균열 선단에 적용하였으나 모두 유사한 균열 경로를 나타냈다. 그러나 고차의 가지함수를 적용했을 때는 균열 끝에서 더 매끄러운 응력분포를 얻을 수 있었다. 동적상태의 균열 문제에서는 균열의 형상이 지그재그 모양이 되는 것을 방지하고 경로를 완만하게 만들기 위해 응력 투사법(stress projection method) 등이 요구되었으며, 이는 Belytschko 등(2003)과 Areias 등(2005)에 의해서 언급된 바 있다. 크고 빠른 하중이 작용할 때 균열의 가지를 찾는 것, 균열의 분기 여부를 결정하는 것 또한 쉽지 않은 문제이며, 앞으로 이 부분들에 대한 연구가 더 활발히 이루어져야 할 것으로 사료된다.

### 감사의 글

본 연구는 국방과학연구소 ADD-06-05-06과 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행한 2005년도 건설핵심기술연구개발사업 05 기반구축 D04-03 및 05 건설핵심 D11의 지원으로 이루어졌습니다.