

# 확장유한요소법을 이용한 다중균열손상의 해석

## Analysis of multi-site-damage using the extended finite element method

지광습\*, 전기우(고려대학교)

### 1. 서 론

항공기는 전체 사용기간 동안 무수한 반복 응력상태에 노출되어 있으며, 이 반복하중은 항공기 구조체에 다수의 피로균열을 발생시켜 구조체의 강성을 저하시키고, 종국에는 항공기 구조체의 파단을 야기할 수 있다.

피로균열의 해석에 관해서는 해석의 편리성 때문에 일반적으로 단일 균열을 대상으로 한 연구가 주종을 이루고 있다[Nguyen et al. 2001; 다수]. 하지만 (1) 다수의 균열이 동시 다발적으로 발생하고, (2) 특정 균열의 중요도가 나머지 균열들과 비교해서 크게 차이가 나지 않으며, (3) 균열 간의 합체가 예상될 경우는 다수의 균열을 직접적으로 고려하여 해석할 수 있는 효과적인 강력한 기법이 필요하다. 공학적인 측면에서 볼 때, 다중균열손상의 해석은 현 다중균열손상이 가지는 잔류강도, 피로수명을 예측할 수 있어야 한다. 그리고 예상되는 다중균열의 상호작용과 성장패턴 또한 매우 중요하게 이해되어야 할 부분이다.

지금까지 다수의 균열을 함유하고 있는 재료의 균열성장에 관한 연구는 주로 응력확대계수와 재료의 탄성강성변화에 대한 연구를 위주로 하여 이루어 졌으며, 최근에는 만개의 무작위로 배치된 정적균열이 존재하는 단위셀(unit cell)을 대상으로 한 연구(Helsing, 1999)도 이루어 졌다. 다수 균열 간의 상호간섭에 관한 연구는 1970년대부터 꾸준히 이루어져 왔다. 비선형 점성균열 간의 상호간섭효과에 대한 연구도 수행되었다(Li et al. 1998). 균열 간의 상호작용에 대한 연구동향은 Kachanov의 최근 논문(Kachanov 2003)에 잘 정리되어 있다.

그러나 성장하는 다중균열에 대한 연구

(Carpinteri and Monetto, 1999)는 수치해석 기법상의 어려움 등으로 인하여 제한적으로 이루어져 왔다. 복잡한 경계조건의 특성상 경계요소법이 이용(Lauterbach and Gross 2002)되는데, (Liang, Huang et al.(2003)은 확장유한요소법(XFEM)을 이용하여 얇은 박판에 발생하는 비정형 균열을 해석한 연구 결과를 제시하여 다중균열의 해석시 전반적으로 적용할 수 있는 수치해석 알고리즘을 제시하였다. 이 연구에서는 두 개의 균열간의 성장을 통한 상호연결을 고려하지 않았기 때문에 균열의 선단이 다른 균열에 매우 가깝게 되면 더 이상 성장을 할 수가 없었다. 최근 본 연구자는 Liang, Huang et al.의 기법을 더욱 발전시킨 다중균열 모사법을 발표하였고 이를 다중 피로균열 성장 모사에 성공적으로 적용하였다 (Zi et al. 2004, 2005).

본 논문에서는 확장유한요소법의 기본원리와 정식화과정을 간략히 소개하고, 다중 피로균열 손상 문제에 적용된 예를 제시하였다.

### 2. 확장유한요소법

#### 2.1 국부단위분할법

유한요소법에서 변위계와 같은 해를 근사화하기 위해 여러 가지 근사함수를 쓸 수 있지만 기본적으로 다음과 같은 형태를 가진다.

$$u = \sum_I N_I u_I \quad (1)$$

여기서  $u$ =변위,  $N_I$ =형상함수,  $u_I$ =절점변위이다. 여러 가지 형상함수들이 사용될 수 있으나 형상함수의 조건으로는 단위분할의 원리를 만족하도록 모든 형상함수의 합은 1이 되어야 한다. 즉,  $\sum_I N_I = 1$  이다. 확장요소법에서는 식

(1)의 절점변위를 전통적인 유한요소법과 같이

단순한 변수로 보지 않고, 이를 여러 변수들로 정의될 수 있는 함수로 표현되는 것으로 하였다. 즉,

$$\mathbf{u}_I = \sum_K \Psi_I^K \mathbf{a}_I^K \quad (2)$$

여기서  $\Psi_{JK}$ =확장함수라고 불리는 해의 국부적인 특이성을 표현하는 함수,  $\mathbf{a}_{IK}$ =추가적으로 도입된 자유도이다. 식 (1)과 (2)을 결합하여 다음과 같은 형태로 사용될 수 있다.

$$\mathbf{u} = \sum_I N_I \left[ \mathbf{u}_I + \sum_K \Psi_I^K \mathbf{a}_I^K \right] \quad (3)$$

전술한 일련의 과정은 Babuska가 제안하여 PUFEM 혹은 GFEM라는 이름으로 개발되었으나, 확장함수를 전체 영역에 걸쳐서 선택함으로써 이산화 방정식의 빈약도가 크게 손상되는 단점이 있었다. Belytschko와 Black(1999)는 이러한 단점을 극복하기 위해 특이성이 심한 지점에만 식 (3)를 적용하여 국부적으로 단위분할의 원리를 만족시켰고, 이를 확장유한요소법이라고 명명하였다. 식 (2)과 (3)에서 확장함수의 선택에는 거의 제한이 없으며 균열을 표현하기 위해 계단형 함수 등과 같은 불연속함수를 사용한다. 선형탄성균열의 균열 끝에서는 Weebergaard 해의 기저함수를 사용한다(Belytschko and Black 1999). 최근 확장유한요소법은 여러 가지 분야에 다양하게 적용되고 있는 추세이다(Zi et al., 2005; 기타)

## 2.2 다중균열 모델

Zi 외(2004)는 다중균열에 대한 해법으로서 식 (3)를 더 일반화하였다. 변위  $\mathbf{u}$ 를 연속변위  $\mathbf{u}^0$ 와 불연속변위  $\mathbf{u}^e$ 의 합으로 표현하고, 각 성분을 다음과 같이 표현하였다.

$$\mathbf{u}^0 = \sum_I N_I \mathbf{u}_I, \quad \mathbf{u}^e = \sum_{J \in E} \mathbf{u}^{J,e} \quad (4),(5)$$

$$\mathbf{u}^{J,e} = \sum_{I \in N_J} N_I^* \Psi_I^* \mathbf{a}_I^{J,e} \quad (6)$$

여기서  $E$ =균열에 사용된 확장함수의 집합,  $N_J$ =확장함수  $J$ 와 관련된 절점들의 집합이다.

## 2.3 지배방정식 및 이산화 지배 방정식

하중  $\tau_0$ 를 받는 다수의 균열  $\Gamma_c$ 를 포함하는 영역  $\Omega$ 의 균열면에 작용하는 하중은 없고, 균열을 제외한 부분은 선형탄성거동을 한다는 가정할 경우 이 계의 약형 평형방정식은 다음과

같다.

$$\delta W^{\text{int}} = \delta W^{\text{ext}} \quad (7)$$

$$\delta W^{\text{int}} = \int_{\Omega \setminus \Gamma_c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (8)$$

$$\delta W^{\text{ext}} = \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 d\Gamma \quad (9)$$

$W^{\text{int}}$ 은 내부일,  $W^{\text{ext}}$ 은  $\boldsymbol{\tau}_0$ 가 경계  $\Gamma_i$ 를 따라서 한 일이며,  $\delta \mathbf{u}$ 는 시험함수,  $\boldsymbol{\sigma}$ 는 변위  $\mathbf{u}$ 로부터 계산된 응력이다. 기존의 유한요소법을 이용하여  $\delta \mathbf{u}$ 와  $\mathbf{u}$ 를 동일한 근사방법으로 나타내고, 약형 (7)과 변위계의 확장 (3)을 통하면, 이산화된 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (10)$$

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{K} \mathbf{q} = \int_{\Omega \setminus \Gamma_c} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{q} \quad (11)$$

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_{\Gamma_i} \mathbf{N} \boldsymbol{\tau}_0 d\Gamma \quad (12)$$

$\mathbf{f}^{\text{int}}$ 과  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ 는 내부힘과 외부힘,  $\mathbf{K}$ 는 강성도 행렬,  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \dots, \mathbf{q}_{N_{or}}^T]^T$ ,  $\mathbf{q}_I = [\mathbf{u}_I^T, \mathbf{a}_I^T]^T$ 는 일반적인 의미에서의 절점변위,  $N_{or}$ 는 전체 절점 갯수,  $\mathbf{B}$ 는 변형률-변위 행렬이고  $\mathbf{C}$ 는 탄성계수행렬이다.

$\mathbf{a}_I$ 의 크기는  $n_{\text{dor}} \times (n_{\text{step}} + n_{\text{tip}} \times 4)$ 인데,  $n_{\text{dor}}$ 는 절점의 자유도,  $n_{\text{step}}$ 과  $n_{\text{tip}}$ 은 해당절점에 연관되어 있는 계단형 확장함수와 균열끝 확장함수의 개수를 나타낸다. 계단끝 확장함수는 4개의 함수들로 구성되어 있다.  $\mathbf{B}$  행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^0 \quad \mathbf{B}^e] \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{B}^0$ 와  $\mathbf{B}^e$ 는 표준 유한요소법의  $\mathbf{B}$  매트릭스와 확장유한요소법에서 새로 추가되는  $\mathbf{B}$  매트릭스를 나타낸다. 이들  $\mathbf{B}$  매트릭스는

$$\mathbf{B}^0 = [\mathbf{B}_1^0 \quad \mathbf{B}_2^0 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n^0]$$

$$\text{and } \mathbf{B}^e = [\mathbf{B}_1^e \quad \mathbf{B}_2^e \quad \dots \quad \mathbf{B}_n^e] \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_I^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$B_i^J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x}(\Psi^J - \Psi_i^J) + N_i \frac{\partial \Psi^J}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y}(\Psi^J - \Psi_i^J) + N_i \frac{\partial \Psi^J}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y}(\Psi^J - \Psi_i^J) + N_i \frac{\partial \Psi^J}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x}(\Psi^J - \Psi_i^J) + N_i \frac{\partial \Psi^J}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ for } J \in \mathcal{E}_i \quad (16)$$

위에서  $n_e$ 는 해당요소의 절점갯수와  $\mathcal{E}_i$ 는 절점  $I$ 에 해당되는 확장함수의 집합을 나타낸다.

### 3. 적용예

#### 3.1 다중균열손상의 피로 및 잔류강도

항공기 구조재의 피로수명은 균열의 성장으로 인해 그 구조재가 파단될 때까지 재하횟수로 정의된다. Paris(Paris and Erdogan 1963)는 소위 Paris' law라고 명명되는 다음과 같은 균열 성장식을 제시하였다.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (17)$$

여기서  $a$ 는 균열의 길이,  $N$ 은 재하횟수,  $\Delta K$ 는 한 하중 사이클 내의 응력확대계수 변화,  $C$ 와  $m$ 은 모델 특성치이다. 혼합모드 파괴에서,  $K$ 는 등가 모드 I 응력확대계수이다.

항공기 산업에서는 Paris 법칙을 사용재료에 특화시킨 NASGRO를 사용하고 있다.

다중 균열 손상의 균열  $i$ 의 성장량  $\Delta a_i$ 는 해당  $\Delta K_i$ 를 사용하여 구한다.

균열의 성장방향은 선형탄성파괴역학의 최대인장응력 방향조건에 따라 다음과 같이 결정한다.

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{4} \left( \rho_K \pm \sqrt{\rho_K^2 + 8} \right) \quad (18)$$

$\rho_K = K_I / K_{II}$ 는 모드 I 응력확대계수와 모드 II 응력확대계수 간의 비를 나타낸다. 식 (17,18)에 있는 응력확대계수는 상관적분법을 이용하여 계산한다.

그림 1(a), (b)은 각각 10개, 50개의 무작위로 배열된 피로균열 성장 패턴을 모사하였다. 계산영역은 가로세로 0.2m를 대상으로 하였고, Paris' 피로모델 상수는  $C = 4.0 \times 10^{-10} (\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^{-m}$ ,  $m = 4$ 이다. 균열의 성장은 요소의 크기에 영향

을 받지 않으며, 하중의 방향에 기인하여 일부 균열은 성장량이 매우 작거나 성장하지 않았고 하중과 수직으로 배열된 균열에서 두드러진 성장을 이루었다. 균열이 합체될 때는 모드 I균열에 가깝기 때문에 거의 수직으로 연결되었다.

그림 2는 50개의 균열이 진전함에 따른 프로수명 곡선을 도시하였다. 균열 합체가 발생한 A, B, C 지점에서는 급격하게 강성이 저하되었다.

다중균열 손상이 있는 항공기 구조재의 잔류강도는 그림 3의 하중변위선도의 a점에 해당한다. 여기서 잔류강도란 현 균열상태에서 반복 없이 하중을 최대로 저항할 수 있는 능력이다.

그림 3의 경우는 선형탄성균열을 대상으로 하기 때문에 최대 하중까지 잔류강도가 선형으로 증가하지만 비선형성을 고려하기 위해

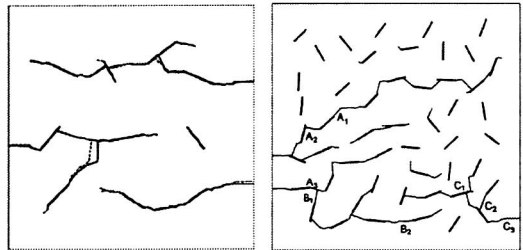


그림 1. 피로균열 성장 양상; (a)10개, (b)50개

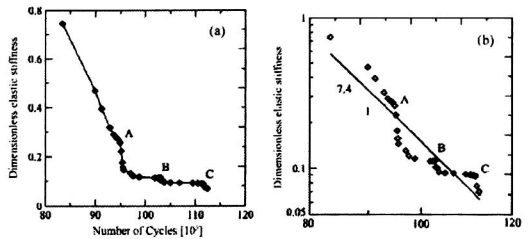


그림 2. 50개 피로균열이 진전함에 따른 강성저하

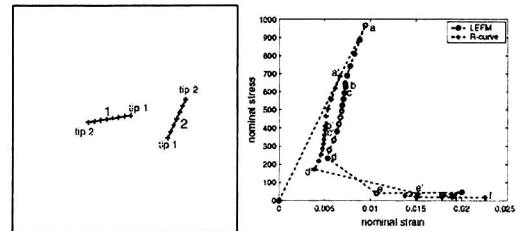


그림 3. LFM 문제의 (a)초기균열과 (b)하중변위 선도

R-Curve등을 도입하면 비선형 거동을 보이게 된다.

### 3.2 동적균열성장

잔류강도를 초과하는 하중조건에서 균열은 동적으로 성장한다. 균열의 발생과 성장의 조건으로서 쌍곡선성 상실조건을 이용하였다. 즉, 음파텐서  $Q$ 의 최소 고유치가 0보다 작거나 같으면 균열이 생성되거나 성장하게 된다.

$$\min \text{eig}(Q) \leq 0 \text{ with } Q = n \cdot A \cdot r \quad (19)$$

여기서,  $n = [\cos\theta \quad \sin\theta]$ 은 각도  $\theta$ 에 의존하는 법선벡터,  $A = C' + \sigma \otimes I$ 이다.

균열의 성장속도는 식(22)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{D_c}{D_t} = \frac{\partial e}{\partial t} + v_c \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

여기서  $v_c$ 는 균열 전파속도,  $e = h \cdot Q \cdot h$ 이다.

동적 균열 성장의 예로써 Kalthoff의 실험결과를 해석하였다. 그림 4는 균열의 속도, 그림 5은 성장 결과를 나타낸다.

### 4. 결론 및 적용 가능성

최근 개발된 확장유한요소법의 구조에 대해 논하였으며, 항공기체에 발생하는 것과 같은 다중균열손상의 해석과 다중균열의 정적, 동적 성장모사의 가능성에 대해 논하였다. 확장유한요소법은 다중균열손상 문제에 직접 적용될 수 있다. 확장유한요소법은 매우 간단한 구조를 가지고 있으며, 대상 재료나 문제가 가지는 특이성을 반영하기 위해 개발된 다른 해석적, 실험적 기법들과 쉽게 결합이 가능하다. 본 논문의 적용예에서 피로수명, 강성저하, 균열의 합체를 직접 계산하였다. 항공기 기체에 사용되는 알루미늄

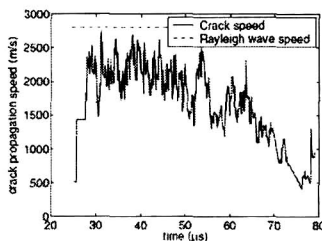


그림 4. Kalthoff 문제의 대한 균열속도 이력

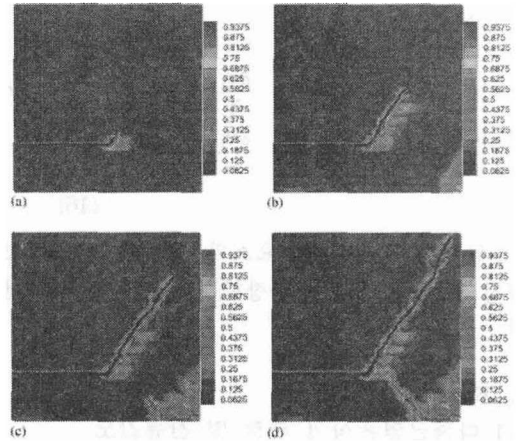


그림 5. Kalthoff 문제의 균열의 진전

늄 등과 같이 재료의 비선형성이 존재하는 경우에도 재료의 피로수명 곡선이나, 혹은 구성방정식의 개발을 통해 효과적으로 적용될 수 있다.

### 감사의 글

본 연구과제는 국방과학연구소 기초연구과제(ADD-06-05-06)의 지원으로 이루어졌습니다.

### 참고문헌

- [1] Zi, G., Song, J.-H., Budyn, E., Lee, S.-H., and Belytschko, T. (2004). "A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth.", *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 12, 901-915
- [2] Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., and Zi, G. (2003). "Dynamic crack propagation on loss of hyperbolicity with a new discontinuous enrichment." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58(12), 1873-1905.
- [3] Zi, G., Chen, H., Xu, J., and Belytschko, T. (2005). "The extended finite element method for dynamic fractures.", *Shock and Vibration* 12(1), 9-23.
- [4] Zi, G., and Belytschko, T. (2003). New crack - tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57: 2221-2240.